XV Idéaux et polynômes d'endomorphismes

XV.A Questions de cours :

1) Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé simple.
2) Hamilton-Cayley
3)

XV.B Exercices :

Exercice 1: * Matrice circulante**

Soit $M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont des nombres complexes.

1. Ecrire M comme un polynôme en J où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que J est diagonalisable, donner son spectre.
3. En déduire que M est diagonalisable, donner son spectre.

Exercice 2: ** Endomorphisme de multiplication à gauche

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to AM$.

1. Justifier que φ_A est un endomorphisme
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $P(\varphi_A)$
3. En déduire que A et φ_A ont les même valeurs propres
4. Donner une CNS pour que φ_A soit diagonalisable.

Exercice 3: **

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^5 = A^2$ et $\mathrm{Tr}(A) = n$. Montrer que $A = I_n$.

Exercice 4: *** Matrice compagnon

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension fini E. On dit que u est cyclique si il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1. Montrer que u est cyclique si et seulement si la matrice de u dans une certaine base est de la forme :
$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C.
3. Soit λ une valeur propre de C, déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.
4. En déduire une CNS pour qu'un endomorphisme cyclique soit diagonalisable.

Exercice 5: ** Lemme des noyaux

Soient P et Q deux polynômes premiers entre eux. Alors pour $u \in \mathcal{L}(E)$:
$$\ker(PQ(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u)).$$

Exercice 6: ** Noyaux itérés

Soit u un endomorphisme. La suite $\left(\ker(P^k(u))\right)_k$ est strictement croissante puis stationnaire.

Exercice 7: * Calcul d'inverse

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Quel est le polynôme minimal de M ? En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}

Exercice 8: ** Calcul de puissances par polynôme minimal

On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Exercice 9: *** Une histoire d'inverse

Soit $A \in Gl_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminez un polynôme P de degré $n-1$ tel que $P(A) = A^{-1}$
2. Déterminez l'ensemble des polynômes tels que $P(A) = A^{-1}$